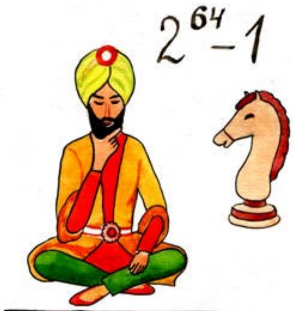
Муниципальное вечернее (сменное) общеобразовательное учреждение
«Каслинская Вечерняя (сменная) общеобразовательная школа № 31»
Каслинского муниципального района

ШИ(о)ЗО

Школьная математическая газета. Выпуск № 2 (январь 2015 г.)



<u>Тема номера.</u>

Показательная функция, ее свойства и график.
Показательные уравнения и неравенства.

Немного из истории возникновения показательной функции.

Популярную легенду о шахматах, многие из вас знают, наверное. Но я её напомню.

«Впервые легенда о награде за изобретении шахмат встречается в XI веке н.э. в книге арабского учёного Аль Бируни. Она гласит о том, что за первую клетку шахматной доски изобретатель потребовал от царя 1 пшеничное зернышко, за вторую клетку – 2, за третью – 4, за четвертую – 8 и т.д. И для того чтобы найти сколько же потребовал изобретатель, нужно сложить члены геометрической прогрессии: 1, 2, 4, 8, …, 2^{63}. Эта сумма равна 2^{64} – 1, т.е. 18446744073709551615. А кто не верит, может на досуге проверить.

Даже если мы не засеем пшеницей всю сумму, мы не сможем собрать урожай из такого количества зерен. Чтобы вместить этот урожай, нам надо будет амбар объёмом в 12000 км^3. При высоте в 4 м, он занял бы площадь в 3000000 км^2, т.е. примерно седьмую часть площади бывшего СССР. Видите, какими числами приходилось оперировать в древности?

В дальнейшем появляются в Западной Европе (это XIV – XV в.) банки, которые давали деньги под большие проценты. И при этом приходилось делать большие, сложные расчеты.

Вскоре появляется идея степени с дробным показателем. Оставался один шаг, чтобы ввести степени с любым действительным показателем. И этот шаг, в конце концов, был сделан в конце XVII в. Исааком Ньютоном.

И уже после этого Иоганн Бернулли рассмотрел степени с переменным действительным показателем, т.е. ввёл показательную функцию».

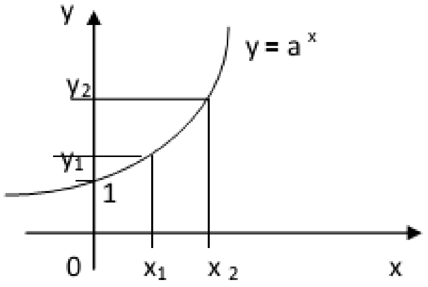
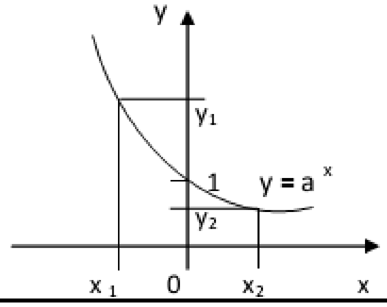
Уважаемые учащиеся, приглашаю вас познакомиться с теорией по теме, выполнить предлагаемые задания и решить задачи математического марафона. Жду ваших работ. С уважением к вам, Ольга Германовна.

Показательная функция

Определение: функция $y = a^x$, где $a > 0$, $x \in R$ называется показательной функцией.

Например, $y = 2^x$, $y = (\frac{1}{2})^x$, $y = (0,3)^x$

Основные свойства функции и ее график

при $a > 1$	при $0 < a < 1$
	
1. **Область опредления** – множество действительных чисел : Д $(a^x) = R$	
2. **Множество значений** функции – множество **положительных** действительных чисел: Е $(a^x) = R_+$	
3. Функции **непрерывны** на области определения	
4. Функция **возрастает** на всей области ее определения, т. е. если $x_2 > x_1$, то $y_2 > y_1$	4. Функция **убывает** на всей области ее определения, т. е. если $x_2 > x_1$, то $y_2 < y_1$
5. **При $x = 0$ $y = 1$** точка (0;1) При $x < 0$ $0 < y < 1$ При $x > 0$ $y > 1$	5. **При $x = 0$ $y = 1$** точка (0;1) При $x < 0$ $y > 1$ При $x > 0$ $0 < y < 1$

Например, $y = 2^x$ – возрастающая функция, $y = (\frac{1}{2})^x$ и $y = (0,3)^x$ - убывающие функции

Показательные уравнения.

Определение. Показательным называется уравнение. Содержащее переменную в показателе степени.

Например, $2^x = 4$ $3^{x-1} = 2x$ $3^x = -9$

Правила решения уравнений:

Если $a^{x1} = a^{x2}$, то $x^1 = x^2$

Например, а) $7^x = 7^2$ **основания равны, значит раны показатели**

$x = 2$ Ответ: 2

б) $(\frac{7}{2})^{x^2} = (\frac{7}{2})^{5x-4}$ основания равны, значит равны показатели

$x^2 = 5x - 4$ переносим слагаемые из правой в левую часть

$x^2 - 5x + 4 + 0$ решаем квадратное уравнение

а = 1, в = - 5, с= 4

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, находим корни уравнения

$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{(-5)^2 - 4*1*4}}{2*1} = \frac{5 - \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$

$x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$

Ответ: 1; 4

Если $a^x = в$ и $в \leq 0$, то уравнение не имеет решения. Например: $(\frac{1}{7})^x = -4$ нет решений

Способы решения уравнений.

1 способ – приведение к общему основанию

$7^x = 49$ — представим 49 в виде степени с основанием 7

$7^x = 7^2$ — по правилу 1 записываем ответ

$\underline{X = 2}$

$7^{3x-2} = (\frac{1}{7})^2$ — зная, что $\frac{1}{7} = 7^{-1}$, имеем

$7^{3x-2} = (7^{-1})^2$ — используем свойство степени $(a^x)^y = a^{xy}$

$7^{3x-2} = 7^{-2}$ — основания равны, значит по правилу 1

$3x - 2 = -2$ — переносим слагаемое без x из левой части в правую

$3x = -2 + 2$ — меняем знаки при переносе

$3x = 0$ — находим x

$X = 0 : 3$

$\underline{X = 0}$

$2^{3-x} = 1$ — 1 можно представить в виде степени с любым основанием о показателем 0

$2^{3-x} = 2^0$ — по правилу 1 имеем

$3 - x = 0$ — переносим слагаемые с «x» и без « x» в разные стороны

$-x = 0-3$

$-x = -3$ — коэффициент при «x» равен -1

$x = -3 : (-1)$

$\underline{x = 3}$

2 способ- вынесение общего множителя за скобки (или введение новой переменной)

$3^{x+1} - 2 * 3^{x-2} = 75$ — вынесем наименьший общий множитель за скобки ($x-2 < x+1$, значит 3^{x-2} общий множитель)

$3^{x-2} *(3^3 - 2 * 1) = 75$ — новый показатель считаем так: $x+1 - (x-2) = x+1-x+2 = 3$

$3^{x-2} * 25 = 75$ — считаем значение в скобках

$3^{x-2} * = 75 : 25$ — находим множитель с показателем

$3^{x-2} * = 3$ — у числа 3 показатель равен 1 и по правилу 1

$X-2 = 1$ — при переносе знак меняем

$X = 1+ 2$

$\underline{X = 3}$

3 способ : приведение уравнения к квадратному через введение новой переменной

$6 * 9^x - 3^x - 5 = 0$

$6 * 3^{2x} - 3^x - 5 = 0$ — представим 9 как 3^2

Пусть $3^x = y$ — введем новую переменную

$6 * y^2 - y - 5 = 0$ — получили квадратное уравнение и решаем его по формулам

$a = 6 \quad в = -1 \quad c = -5$

$Д = (-1)^2 - 4 * 6 * (-5) = 1 + 120 = 121 > 0$, 2 корня

$$y_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{121}}{2 * 6} = \frac{1 - 11}{12} = \frac{-10}{12} = \frac{-5}{6}$$

$$У_2 = \frac{1+11}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$3^x = -\frac{5}{6}$ или $3^x = 1$ — делаем обратную замену

Уравнение не имеет решений

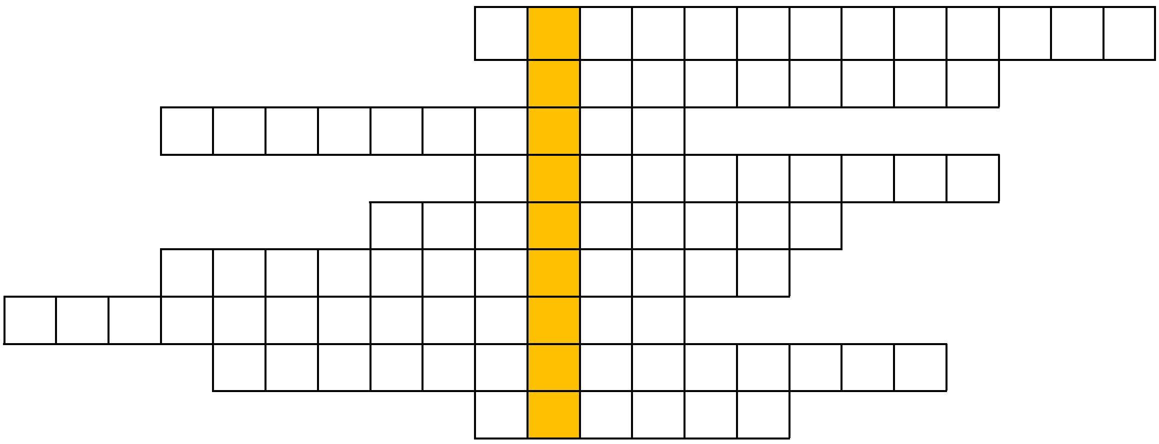
$3^x = 3^0$ — по правилу 1

$\underline{x = 0}$

Задание 1. Разгадать кроссворд

Назвать свойства показательной функции, заполняя горизонтальные строчки в кроссворде.

1. Какие значения принимает функция $y = 2^x$
2. Как расположен график функции $y = 3^{|x|}$ относительно оси ОУ.
3. Какой по монотонности является функция $y = a^x$ при а=1
4. Как называется переменная х в функции $y = a^x$
5. Какой по монотонности является функция $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$
6. Какой по монотонности является функция $y = 4^x$
7. Какие значения принимает функция $y = -3^x$
8. Какие числа являются областью определения показательной функции.
9. Какой по четности является функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$



Задание 2. Решить уравнения приведением к одному основанию

1) $3^{x-1} = 27$ 2) $10^{x+1} = 0{,}1$ 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1{,}5$ 4) $4^{x^2+x} = 1$ 5) $27^{1-x} = \frac{1}{81}$

6) $9^x = (\frac{1}{27})^{2-x}$ 7) $49^{x+1} = (\frac{1}{7})^x$ 8) $(\frac{1}{6})^{x+1} = 36^{x-1}$ 9) $4^{5x+1} = (\frac{1}{2})^{6-4x}$

10) $16 * 8^{2+3x} = 1$ 11) $25^{1-3x} = \frac{1}{125}$

Задание 3. Решить уравнения вынесением общего множителя.

1) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$ 2) $2^{x+3} + 2^{x+1} - 7 * 2^x = 48$

3) $3^{x+2} - 5 * 3^x = 36$ 4) $2 * 5^{x+2} - 10 * 5^x = 8$

Показательные неравенства

Определение: простейшими показательными неравенствами называются неравенства вида $a^x > в$ или $a^x < в$

Решение показательных неравенств основано на свойствах:

1. При $a > 1$: если $a^{x2} > a^{x1}$,
   то $x^2 > x^1$
2. При $0 < a < 1$: если $a^{x2} > a^{x1}$, то $x^2 < x^1$

   примеры:

   1 способ- приведение к одному основанию

   1) $64^x < \frac{1}{8}$

$2^{6x} < 2^{-3}$ — привести к одному основанию

$a = 2$ — определяем основание

$2 > 1$ — сравниваем основание с 1

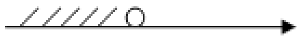
$y = 2^t$ – возрастающая — определяем возрастание или убывание функции

$6x < -3$ — делаем вывод по свойству 1, так как $a > 1$

$\frac{6x}{6} < \frac{-3}{6}$ — делим обе части неравенства на число перед x число 6 положительное, поэтому знак неравенства не меняем и сокращаем

$x < \frac{-1}{2}$ — неравенство строгое, так как x строго меньше (<), то кружок пустой

Штрихи идут влево, так как меньше (<)



$-\infty$ $\quad \frac{-1}{2}$ $\quad x$

$x \in (-\infty; \frac{-1}{2})$

Ответ: $(-\infty; \frac{-1}{2})$

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} \le \left(\frac{4}{3}\right)^{2x+5}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} \le \left(\frac{3}{4}\right)^{-2x-5}$ — приводим к одному основанию

$a = \frac{3}{4}$ — определяем основание

$0 < \frac{3}{4} < 1$ — сравниваем основание с 1

$y = \left(\frac{3}{4}\right)^t$ – убывающая — определяем убывание или возрастание функции

$x-3 \ge -2x-5$ — делаем вывод по свойству 2 и меняем знак неравенства

$x + 2x \ge -5 + 3$ — переносим слагаемые с « x» и без « x» в разные стороны, меняя знак

$3x \ge -2$

$\frac{3x}{3} \ge \frac{-2}{3}$ — делим каждую часть неравенства на положительное число, знак не меняем и сокращаем

$X \ge -\frac{2}{3}$ — неравенство нестрогое, так как x больше или равно (≥)

$\frac{-2}{3}$ $\quad X \quad \infty$

кружочек заштрихован, так как неравенство нестрогое

штриховка идет вправо, так как x больше или равно (≥)

$x \in (\frac{-2}{3}; \infty)$

Ответ: $(\frac{-2}{3}; \infty)$

Задание 4. Решить неравенства:

1) $64^{x} < 1/8$ 2) $25^{x} > 1/5$ 3) $2^{x} < 16$ 4) $49^{x} > 1$

Задание 5. Выберите показательные функции, которые:

А) убывают на области определения;

Б) возрастают на области определения.

$y = 2^x$; $y = 0{,}75^x$; $y = (\frac{13}{7})^x$; $y = -5^x$; $y = (\frac{2}{3})^x$; $y = x^2$; $y = x^{\frac{1}{2}}$;

$y = -0{,}9^x$; $y = 0{,}5^x$; $y = 1{,}3^x$.

Задание 6. Используя основные свойства степеней, упростить выражения:

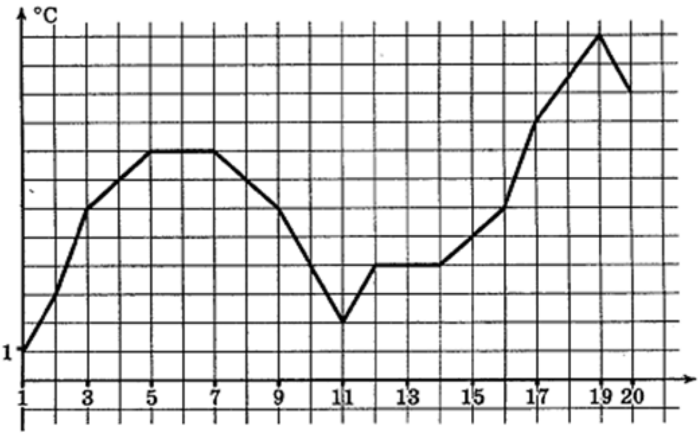
1) $\dfrac{3*a^{3,6} * a^{0,5}}{a^{1,1}}$ 1) $\dfrac{2* x^{4,8} * x^{-0,2}}{x^{1,6}}$

Основные свойства степеней

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \qquad \left(a^x\right)^y = a^{xy}$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

Математический марафон. Тема № 2. Срок сдачи: 1 февраля.



На рисунке изображен график колебания температуры в течение первых 20 дней апреля. По горизонтальной оси отложены дни, а по вертикальной — среднесуточная температура воздуха.

2.1. Какой была среднесуточная температура воздуха 6 апреля? Ответ дайте в градусах Цельсия.

2.2. Какого числа среднесуточная температура воздуха в первый раз достигла 7˚C?

2.3. Какого числа среднесуточная температура воздуха была максимальной?

2.4. Какого числа среднесуточная температура воздуха была минимальной?

2.5. Какой была максимальная среднесуточная температура воздуха? Ответ дайте в градусах Цельсия.

2.6. Какой была минимальная среднесуточная температура воздуха? Ответ дайте в градусах Цельсия.

2.7. В течение скольких дней в этот интервал времени среднесуточная температура воздуха была равна +6˚C?

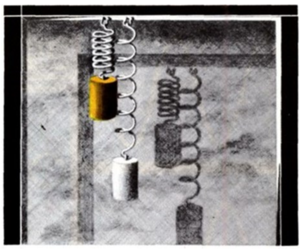
2.8. Считается, что посев семян моркови производят при среднесуточной температуре воздуха не ниже +6˚C. Исходя из этого, вычислите, в течение какого количества дней был возможен посев семян моркови в этот интервал времени?

Применение показательной функции в жизни, науке и технике.

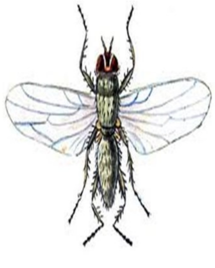
Если снять кипящий чайник с огня, то сначала он быстро остывает, а потом остывание идет гораздо медленнее, это явление описывается формулой $T=(T_1-T_0)e^{-kt}+T_1$

При **падении тел в безвоздушном пространстве** скорость их непрерывно возрастает. При падении тел в воздухе скорость падения тоже увеличивается, но не может превзойти определенной величины. Если считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости падения парашютиста, т.е. что $F=kv$, то через t секунд скорость падения будет равна: $\mathbf{v=mg/k(1-e^{-kt/m})}$**,** где m - масса парашютиста.

Много трудных математических задач приходится решать **в теории межпланетных путешествий**. Одной из них является задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость v. Эта масса M зависит от массы m самой ракеты (без топлива) и от скорости v_0, с которой продукты горения вытекают из ракетного двигателя. Если не учитывать сопротивление воздуха и притяжение Земли, то масса топлива определиться формулой: $\mathbf{M=m(e^{v/v0}-1)}$ (формула К.Э.Циалковского). Например, для того чтобы ракете с массой 1,5 т придать скорость 8000 м/с, надо при скорости истечения газов 2000 м/с взять примерно 80 т топлива.



Если при **колебаниях маятника**, гири, качающейся на пружине, не пренебрегать сопротивлением воздуха, то амплитуда колебаний становится все меньше, колебания затухают. Это явление можно объяснить формулой: $\mathbf{s=Ae^{-kt}\sin(\omega t+\omega)}$**.**

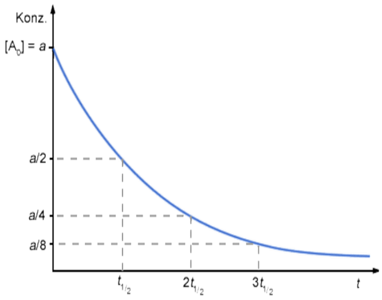


Закон органического размножения: при благоприятных условиях (отсутствие врагов, большое количество пищи) живые организмы **размножались бы по закону показательной функции.**

Например: одна комнатная муха может за лето произвести 8 10^{14} особей потомства. Их вес составил бы несколько миллионов тонн (а вес потомство пары мух превысил бы вес нашей планеты), они бы заняли огромное пространство, а если выстроить их в цепочку, то её длинна будет больше, чем расстояние от Земли до Солнца. Но так как, кроме мух существует множество других животных и растений, многие из которых являются естественными врагами мух их количество не достигает вышеуказанных значений.

По такому же принципу распространились завезённые в Австралию кролики, которые стали экологической катастрофой для этого уникального региона. Рост различных видов микроорганизмов и бактерий, дрожжей, ферментов все эти процессы подчиняются одному закону: $\boldsymbol{N = N_0e^{kt}}$

Рост народонаселения. Изменение числа людей в стране на небольшом отрезке времени описывается формулой $N = N_0e^{kt}$, где N_0 - число людей в момент времени $t = 0$, N -число людей в момент времени t, k-константа.



Когда **радиоактивное вещество распадается**, его количество уменьшается, через некоторое время остается половина от первоначального вещества. Этот промежуток времени t_0 называется периодом полураспада. Общая формула для этого процесса: $\boldsymbol{m = m_0(1/2)^{-t/t_0}}$, где m_0 - первоначальная масса вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество. Это явление используют для определения возраста археологических находок. Радий, например, распадается по закону:

$\boldsymbol{M = M_0e^{-kt}}$. Используя данную формулу ученые рассчитали возраст Земли (радий распада-

Исследуя расположение планет солнечной системы вокруг Солнца, немецкий астроном И.Э. Боде в 1772 составил следующую таблицу:

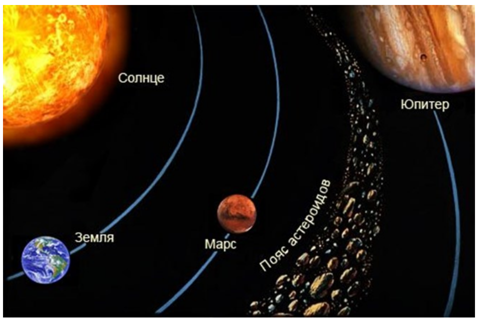
№	Планета	Расстояние (L) до солнца (в астрономических единицах)
1	Меркурий	0,4
2	Венера	0,7
3	Земля	1
4	Марс	1,5
5	Юпитер	5,2
6	Сатурн	9,5

К тому времени было открыто только шесть планет, поэтому все вычисления останавливаются на Сатурне.

Эти вычисления произвел И.Э. Боде по следующей формуле:

$$L = \frac{3 * 2^{n-2} + 4}{19}$$

Данная формула особенно точна для Венеры, Земли и Юпитера.



Как известно, между Марсом и Юпитером планеты не существует, но если следовать таблице Боде, на данной орбите должно находиться какое-либо космическое тело. И действительно, после некоторых исследований учёными был открыт пояс астероидов**.** Это было воистину торжеством науки и триумфом математики!