Муниципальное вечернее (сменное) общеобразовательное учреждение
«Каслинская Вечерняя (сменная) общеобразовательная школа № 31»
Каслинского муниципального района

ШИ(о)ЗО

Школьная математическая газета. Выпуск № 3 (февраль 2015 г.)

Тема номера.

Логарифмическая функция, ее свойства и график.
Логарифмические уравнения и неравенства.

«Вряд ли мне следует объяснять, что одна из важнейших задач математики – помощь другим наукам. Стало уже общепринятым утверждение, что быстрее всего развиваются науки,
фундаментальные результаты ,которых могут быть сформулированы математически. Используют математические методы, выводят важнейшие следствия, которые иным способом вряд ли можно было бы получить. Одно это, не говоря уже о других аспектах, оправдывает претензии математики на титул ***Королевы Наук****».*

Морделл Л.,
английский математик


Дж. Непер.

Историческая справка

Термин «ЛОГАРИФМ» предложил Дж. Непер; он возник из сочетания греческих слов logos (здесь — отношение) и arithmos (число); в античной математике квадрат, куб и т. д. отношения a/b называются «двойным», «тройным» и т. д. отношением. Таким образом, для Непера слова «lógu arithmós» означали «число (кратность) отношения», то есть логарифм у Дж. Непера — *вспомогательное число для измерения отношения двух чисел.*

(продолжение на стр. 8)

Конкурс!!! Конкурс!!!!
Обратили внимание на пустой прямоугольник в предыдущих номерах газеты? Это место для логотипа нашей газеты. Мы ждем ваши работы.

Логарифмы и логарифмическая функция

Определение. Логарифмом числа N по основанию a (a >0, a ≠1) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы плучить число N:

$\log_a N = x$, так как $a^x = N$.

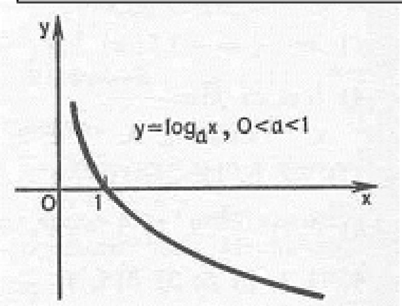
Например, $\log_5 125 = 3$, так как $5^3 = 125$

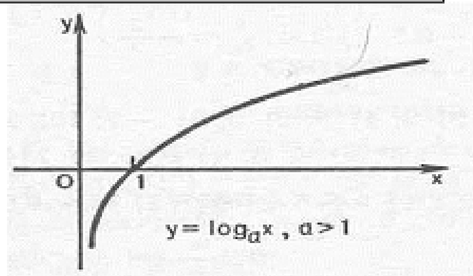
Основное логарифмическое тождество.

$a^{\log_a N} = N$

пример:
1) $3^{\log_3 5} = 5$

Определение: Функцию, заданную формулой $y=\log_a x$, называют ***логарифмической*** функцией с основанием *a*.





Свойства логарифмической функции

1. Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел.(R_+)
2. Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел.(R)
3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает (при a>0) или убывает (при 0<a<1)

Основные свойства логарифмов.

1)**(логарифм произведения)**
Логарифм произведения двух положительных чисел по основанию a (a >0, a ≠1) равен сумме логарифмов множителей по тому же основанию:
$\log_a (в \cdot c) = \log_a в + \log_a c$, где в > 0 и c > 0
пример: $\log_5 3 + \log_5 7 = \log_5 (3 \cdot 7) = \log_5 21$

2)**(логарифм частного)** Логарифм частного двух положительных чисел по основанию a (a >0, a ≠1) равен разности логарифмов числителя и знаменателя по тому же основанию:

$\log_a \frac{в}{c} = \log_a в - \log_a c$, где в > 0 и c > 0

Пример: $\log_2 10 - \log_2 2 = \log_2 \frac{10}{2} = \log_2 5$

3) **(логарифм степени)**
Логарифм степени x^{α} по основанию a (a >0, a ≠1) равен произведению показателя α на логарифм числа x по основанию a :
$\log_a x^{\alpha} = \alpha \cdot \log_a x$, где x > 0
примеры:

а) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \cdot \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$

4) **(переход к новому основанию)**
Логарифм положительного числа по данному основанию равен частному от деления логарифма этого же числа по новому основанию на логарифм данного основания по новому основанию
$\log_a x = \dfrac{\log_в x}{\log_в a}$, где x > 0, a > 0, в > 0, a ≠1, в ≠1

примеры:
$\log_{16} 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 16} = \dfrac{6}{4} = 1{,}5$

5) **(степень в основании логарифма)**

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b; a>0, a\neq 1, b>0$$

6) **$\log_a a = 1$**

7) **$\log_a 1 = 0$**

Информационная карточка по теме «Логарифмы»

1. **Определение логарифма.**

1)Найти $\log_{0,5} 16$

Решение: $\log_{0,5} 16 = -4$, так как $(0,5)^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16$

2)Найти x , если $\log_{0,1} x = -1$

По определению логарифма $x = (0,1)^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = 10^1 = 10$

3)Найти x, если $\log_x 216 = 3$

По определению $x^3 = 216$

$x^3 = 6^3$

$x = 6$

4) Найти x, если $\log_3 \frac{1}{27} = x$

По определению $3^x = \frac{1}{27}$

$3^x = 3^{-3}$

$x = -3$

2. **Основное логарифмическое тождество.**

1)$7^{2\log 8} = (7^{\log 8})^2 = 8^2 = 64$

2) $4^{1+\log 2} = 4^1 * 4^{\log 2} = 4 * 2 = 8$ (по свойству степени $a^{x+y} = a^x * a^y$)

3) $10^{\log 0{,}01 - 2} = \frac{10^{\log 0{,}01}}{10^2} = \frac{0{,}01}{100} = 0{,}0001$ (по свойству степени $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$)

3. **Основные свойства логарифмов.**

1)(логарифм произведения)

$\log_5 21 = \log_5 (3 * 7) = \log_5 3 + \log_5 7$

2)(логарифм частного)

Пример: $\log_2 5 = \log_2 \frac{10}{2} = \log_2 10 - \log_2 2 = \log_2 10 - 1$

3) (логарифм степени)

$\log_2 \frac{1}{64} = \log_2 2^{-6} = -6 * \log_2 2 = -6 * 1 = -6$

4)(переход к новому основанию)

$\frac{\log_2 64}{\log_2 16} = \log_{16} 64$

5)$\log_7 7 = 1$ 6) $\log_8 1 = 0$

4.Свойства логарифмической функции

1) Найти область определения функции $y = \log_8 (4 - 5x)$

Решение: область определения логарифмической функции – множество R_+. Поэтому, заданная функция определена только для тех x, при которых

$4-5x > 0$

$-5x > -4$

$x < \frac{-4}{-5}$

$x < -0,8$.

Следовательно, областью определения заданной функции является интервал $(-\infty; 0,8)$

2). Сравним числа: а)$\log_3 5$ и $\log_3 7$; б) $\log_{1/3} 5$ и $\log_{1/3} 7$

Решение:

а) Логарифмическая функция с основанием, большим 1, возрастает на всей числовой прямой.

основание a = 3, так как 7>5, то $\log_3 5 < \log_3 7$.

б) В данном случае основание логарифма меньше 1, поэтому функция $\log_{1/3} x$ убывает, и, следовательно, $\log_{1/3} 5 > \log_{1/3} 7$.

Способ 4: уравнения, решаемые приведением логарифмов к одному и тому же основанию

(использование формулы $\log_a x = \frac{\log_в x}{\log_в a}$,

где $x > 0$, $a > 0$, $в > 0$, $a \neq 1$, $в \neq 1$)

пример: решить уравнение

$2\log_5 x + 2\log_x 5 = 5$

$2\log_5 x + 2\frac{\log_5 5}{\log_5 x} = 5$

$2\log_5 x + 2\frac{1}{\log_5 x} = 5$

обозначим $y = \log_5 x$ и получим уравнение

$2y + \frac{2}{y} - 5 = 0$ - приведем к общему знаменателю

$2y^2 - 5y + 2 = 0$, $y \neq 0$

а= в = с=

Д= $в^2$ - 4 ас=

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$y_1 =$ $y_2 =$

$\log_5 x =$ или $\log_5 x =$

$x_1 =$ $x_2 =$

проверка:

Ответ:

Способ 5: уравнения, решаемые логарифмированием его обеих частей

Пример: решить уравнение

1) $5^x = 2$

$\log_5 5^x = \log_5 2$

$x * \log_5 5 = \log_5 2$

$x * 1 = \log_5 2$

$x = \log_5 2$

2) $5^{1-3x} = 7$

$\log_5 5^{1-3x} = \log_5 7$

$(1 - 3x) * 1 = \log_5 7$

$1 - 3x = \log_5 7$

$-3x = \log_5 7 - 1$

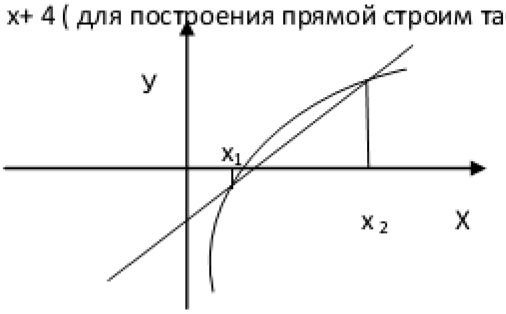
$x = \frac{1 - \log_5 7}{3}$

Способ **6**: Графическое решение логарифмического уравнения.

Пример: решить уравнение

$\log_5 x = x + 4$

В одной и той же системе координат строим графики функций $y_1 = \log_5 x$ и $y_2 = x + 4$ (для построения прямой строим таблицу на две точки)



Ответ:

Выполните задания.

1. **Расшифруйте имя и фамилию одного из создателей логарифмов.**

И	$\log_2 16$
Ю	$\log_3(1/3)$
Г	$\log_{0,5}(0,125)$
Б	$2^{\log_2 64}$
О	$9^{\log_3 12}$
Б	$3^{6\log_3 2}$
С	$10^{5-\lg 5}$
Р	$\log_2 \log_3 81$
Т	$8^{1+2\log_8 3}$
И	$\log_{0,5}(256^{-1/2})$

4	144	64	20000	72

64	- 1	2	3	4

2) Кому принадлежат слова: “Изобретение логарифмов, сократив работу астронома, продлило ему жизнь”?

П	$\lg x = 2$
А	$\log_{49} x = 1/2$
С	$\ln x = 1$
Л	$\log_x 1024 = 10$
А	$\log_x 1/343 = -3$
Л	$\log_{1/2} x = -1$
И	$\ln x = 0$

2	7	100	2	7	e

Внимание!
В некоторых заданиях есть буквы, неиспользуемые в зашифрованных словах

3) Чьей идеей руководствовались изобретатели логарифмов?

Х	$0{,}5\log_5 4+\log_5 2{,}5$
И	$(\log_3 8)/(\log_3 16)$
М	$(\log_5 36-\log_5 12)/(\log_5 9)$
Е	$(\log_{27} 8)/(\log_3 16)$
Р	$\log_5 375-\log_5 3$
А	$\log_{12} 2+\log_{12} 72$
Д	$\log_{27}(9\sqrt{3})$

2	3	1	3/4	1/2	1/4	5/6

4) В честь кого было названо число е?

Л	$\log_3(x-2)+\log_3(x+6) = 2$
А	$\log_7(2x^2+7x-6)-\log_7(x+2) = \log_7 x$
Р	$(\log_2 x)^2-2\log_2 x+1 = 0$
Э	$\log_3 x+2\log_x 3 = 3$
Д	$(\log_{1/5}x+\log_{25}x)+1/(\log x125) = 1/6$
О	$\log_3(x+1) = 4$
Н	$\log_{1/3}(3^x+2x-3) = -x$
Е	$\log_{7x}2+\log_{7x}4+\log_{7x}5 = \log_{7x}(x+35)$
Й	$\log_{3x+8}(2x^2+3) = \log_{3x+8}35$
К	$\log_4(3x-4) = \log_4(x+1)$

3	5	80	1,5	1	2	1/5

3; 9	4	3	5	2

5) Кто опубликовал таблицу десятичных логарифмов в 1624 году?

С	$\log_2(x-5) \leq 2$
И	$\log_{0,3}(2x+5) \geq \log_{0,3}(x+1)$
Г	$\lg(x^2+2x+2) < 1$
Б	$\log_{0,2}x - \log_5(x-2) < \log_{0,2}3$
Р	$\log_{1/3}(x-2) + \log_{1/3}(12 - x) \geq --2$
Г	$\log_{1/6}(x+4) > -1$

(3; +∞)	(2; 3]; [11; 12)	Ø	(-4; 2)	(-4; 2)	(5; 9]

Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма, называют **логарифмическим.** Например, $\log_3 x = 2$, $\log_4(x-1) = 2$

Способ 1. Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма

(логарифмом числа в по основанию а, где **а > 0** , а ≠1, называется х - показатель степени, в которую надо возвести а, чтобы получить в:
$\log_a в = x$, т.к. $a^x = в$)

Пример: решить уравнение
$\log_2(2x-1) = 3$
$2x - 1 = 2^3$
$2x - 1 = 8$
$2x = 8+1$
$2x = 9$
$x = 9:2$
$\underline{x = 4{,}5}$
Ответ: 4,5

Способ 2. Метод потенцирования – метод, основанный на переходе от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их. Используют свойства логарифмов. **Обязательна проверка методом подстановки.**

Примеры:

1. Решить уравнение
   $\log_5 x = \log_5(6-x)$
   $x^2 = 6 - x$ из равенства логарифмов
   $x^2 + x - 6 = 0$
   а = в = с =
   $Д = в^2 - 4ас$
   $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
   $x_1 = -3$ $x_2 = 2$
   проверка:
   $x_1 = -3$
   $\log_5(-3) = \log_5(6-(-3))$
   $\log_5 9 = \log_5 9$ верно
   $x_2 = 2$
   ....
   Ответ: -3; 2

2) $\log_3(x+2) + \log_3(x+1) = \log_3(x+5)$

$\log_3((x+2)(x+1)) = \log_3(x+5)$
$x^2 + 3x + 2 = x + 5$
$x^2 + 2x - 3 = 0$
....
Проверка:
$x_1 = -3$

$\log_3(-3+2) + \log_3(-3+1) = \log_3(-3+5)$

$\log_3(-1) + \log_3(-2) = \log_3 2$, значит, число – 3 не является корнем данного уравнения, т.к. логарифм отрицательного числа

Способ 3. Приведение логарифмического уравнения к квадратному уравнению

Пример: решить уравнение

$\log_2 x - 3\log_2 x = 4$

Пусть $\log_2 x = y$, тогда

$y^2 - 3y - 4 = 0$

а = в = с=

$Д = в^2 - 4ас$

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$y_1 = -1$ $y_2 = 4$

возвращаемся к подстановке и получаем новые уравнения

$\log_2 x = -1$ или $\log_2 x = 4$

$x_1 = 2^{-1}$ $x_2 = 2^4$

$x_1 = ½$ $x_2 = 16$

проверка:

Ответ: ½ ; 16

Историческая справка

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (1707-1783)

Термин «натуральный логарифм» принадлежит Н. Меркатору. *«Характеристика»* — английскому математику Г. Бригсу. *«Мантисса»* в нашем смысле — логарифм - Эйлеру. «*Основание*» логарифма — ему же .

Понятие о *модуле* перехода ввёл Н. Меркатор. Современное определение логарифма впервые дано английским математиком В. Гардинером (1742).

Знак логарифма — результат сокращения слова «ЛОГАРИФМ» — встречается в различных видах почти одновременно с появлением первых таблиц [напр., Log — у И. Кеплера (1624) и Г. Бригса (1631), log и l. — Б. Кавальери(1632, 1643)]

Изобретение логарифмов

Изобретение логарифмов в начале XVII в. тесно связано с развитием в XVI в. производства и торговли, астрономии и мореплавания, требовавших усовершенствования методов вычислительной математики. Все чаще требовалось быстро производить громоздкие действия над многозначными числами, все точнее и точнее должны были быть результаты действий. Вот тогда-то и нашла воплощение идея логарифмов, ценность которых состоит в сведении сложных действий III ступени (возведения в степень и извлечения корня) к более простым действиям II ступени (умножению и делению), а последних - к самым простым, к действиям I ступени (сложению и вычитанию).

Логарифмы необычайно быстро вошли в практику. Изобретатели логарифмов не ограничились разработкой новой теории. Было создано практическое средство - таблицы логарифмов, - резко повысившее производительность труда вычислителей. Первые таблицы логарифмов составлены независимо друг от друга шотландским матаматиком Дж. Непером(1550 - 1617) и швейцарцем И. Бюрги (1552 - 1632). В таблицы Непера, изданные в книгах под названиями "Описание удивительной таблицы логарифмов" (1614 г.) и "Устройство удивительной таблицы логарифмов" (1619 г.), вошли значения логарифмов синусов, косинусов и тангенсов для углов от 0 до 90 с шагом в 1 минуту. Бюрги подготовил свои таблицы логарифмов чисел, по-видимому, к 1610 г., но вышли в свет они в 1620 г., уже после издания таблиц Непера, и поэтому остались незамеченными.

Уже в 1623 г., т. е. всего через 9 лет после издания первых таблиц, английским математиком Д. Гантером была изобретена первая логарифмическая линейка, ставшая рабочим инструментом для многих поколений. Вплоть до самого последнего времени, когда на наших глазах повсеместное распространение получает электронная вычислительная техника и роль логарифмов как средств вычислений резко снижается.

Проверь себя

1. Иобст Бюрги
2. Лаплас
3. Архимед
4. ЛеонардЭйлер
5. Бриггс

Применение логарифмов в практической деятельности

Задача №1. Население города возрастает ежегодно на 3%. Через сколько лет население этого города увеличиться в 1,5 раза?

Решение. Для решения этой задачи применим формулу сложных процентов: $A = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$. Примем население города за a, тогда $A = 1,5a$, $p = 3$ и x – неизвестно. Сделав подстановку в формулу и сократив на a, получим: $1,5 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^x$ или

$1,03^x = 1,5$. Чтобы решить это показательное уравнение прологарифмируем его. $x \lg 1,03 = \lg 1,5$, откуда $x = \frac{\lg 1,5}{\lg 1,03}$. Найдя по таблице $\lg 1,5$ и $\lg 1,03$, получим $x = \frac{0,1761}{0,0128} = \frac{1761}{128} \approx 14$.

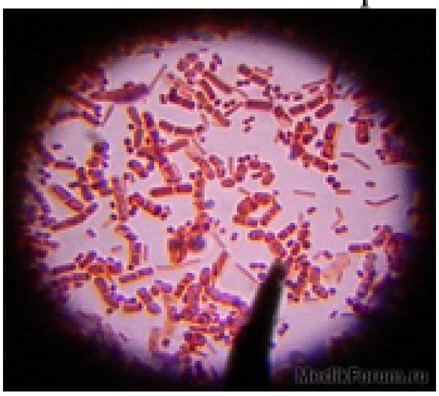
Примерно через 14 лет.

Используются логарифмы и в расчётах, связанных с изменением атмосферного давления при изменении высоты над уровнем моря.

Задача №3. Зависимость давления атмосферы p (в сантиметрах ртутного столба) от выраженной в километрах высоты h над уровнем моря выражается формулой $p = 76 \cdot 2,7^{-\frac{h}{8}}$. Вычислим, каким будет атмосферное давление на вершине Эльбруса, высоты которой 5,6 км?.

Биология

Задача №1. В начальный момент времени было 8 бактерий, через 2 ч после помещения бактерий в питательную среду их число возросло до 100. Через сколько времени с момента помещения в питательную среду следует ожидать колонию в 500 бактерий?



Решение. В обозначениях задачи «0» эти данные записываются следующим образом: $q = 8, t = 2$, $p = \frac{100}{8}$, $B = 500$. Значит, требуемое время соответствует значению выражения

$\frac{2 \cdot (\lg 500 - \lg 8)}{\lg \frac{100}{8}} \approx \frac{2 \cdot 1,7959...}{1,0970...} = 3,27$, т.е. примерно через 3 ч 15 мин.

Математический марафон. Тема 3.
Мастер– класс решения задач

НАХОЖДЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ ОТ ДАННОГО ЧИСЛА

З а д а ч а. В семенах сои содержится 20% масла. Сколько масла содержится в 700 кг сои?

Р е ш е н и е.

В задаче требуется найти указанную часть (20%) от известной величины (700 кг). Основное значение величины – 700 кг. Ее мы можем принять за 100%. Кратко условие задачи можно записать так:

700 кг – 100%,

x кг – 20%.

Здесь за x принята искомая масса масла. Узнаем, какая масса сои приходится на 1 %. Поскольку на 100 % приходится 700 кг, то на 1 % будет приходиться масса, в 100 раз меньшая, то есть 700 : 100 = 7(кг). Значит, на 20 % будет приходиться в 20 раз больше:

7 · 20 = 140(кг). Следовательно, в 700 кг сои содержится 140 кг масла.

НАХОЖДЕНИЕ ЧИСЛА ПО ЕГО ПРОЦЕНТАМ

З а д а ч а. Из хлопка-сырца получается 24 % волокна. Сколько надо взять хлопка-сырца, чтобы получить 480 кг волокна?

Эту задачу можно решить и иначе.

Если в условии этой задачи вместо 24 % написать равное ему число 0,24, то получим задачу на нахождение числа по известной его части (дроби). А такие задачи решают делением. Отсюда вытекает еще один способ решения: 1) 24% = 0,24; 2) 480:0,24=2000 (кг)=2(т).

ПРОЦЕНТНОЕ ОТНОШЕНИЕ ДВУХ ЧИСЕЛ

З а д а ч а 1. Надо вспахать участок поля в 500 га. В первый день вспахали 150 га. Сколько процентов составляет вспаханный участок от всего участка?

Решение.

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти отношение (частное) вспаханной части участка ко всей площади участка и выразить это отношение в процентах:

$$\frac{150}{500} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%.$$

Задачи для решения: **Срок: 10 марта 2015 г.**

1. Найдите: а) 10% от 150; б) 7% от 40 км; в) 15% от 200 кг; г) 10% от 0,16 ц.
2. Найдите число: а) 5% которого равны 15; б) 7% которого составляют 3,5; в) если 24% его равны 18;
3. Посеяли 300 зерен, из них 270 дали всходы. Определите процент всхожести зерен.
4. В 450 г раствора содержится 27 г соли. Определите процент содержания соли в растворе.
5. Каким бы чистым ни казался воздух, в нем всегда имеется пыль. Когда мы дышим через нос, пыли задерживается на 60 % больше, чем тогда, когда мы дышим через рот. Во сколько раз при дыхании через нос пыли задерживается больше, чем при дыхании ртом?
6. Лимонный маргарин содержит 64% жира, 16 % сахара и другие продукты. Сколько килограммов жира, сахара и других продуктов содержится в 2,25 т лимонного маргарина?
7. Бригада рабочих должна была заасфальтировать участок дороги длиной 840 м. В первый день она выполнила 25% задания, во второй день 40% , а остальная часть задания была выполнена в третий день. Сколько метров дороги было заасфальтировано в третий день?
8. Школа закупает книги по цене 50 рублей за штуку. При покупке больше 10 штук магазин дает скидку 10 %. Сколько книг можно купить на 1000 рублей?
9. Горные лыжи стоят 16 000 рублей. Сколько рублей будут стоить горные лыжи во время сезонной распродажи, когда на них объявлена скидка 20 %?
10. Шариковая ручка стоит 7 рублей. При покупке более 50 ручек на всю покупку начинает действовать скидка 20 %. Сколько рублей нужно заплатить при покупке 120 ручек?.